Matematyka
Poziom rozszerzony

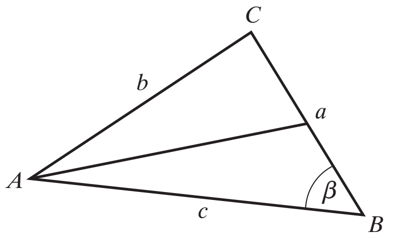
Listopad 2009

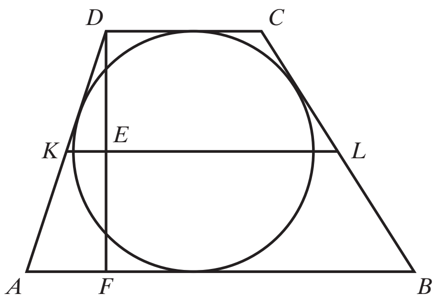
W kluczu są prezentowane przykładowe prawidłowe odpowiedzi. Należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest synonimiczny wobec schematu, oraz inne odpowiedzi, nieprzewidziane w kluczu, ale poprawne.

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
1.	Dokonanie niewielkiego postępu. Sprowadzenie układu równań do równania z jedną niewiadomą. $\begin{cases} 3-\lvert y\rvert=\lvert x\rvert \\ 3=6-2\lvert y\rvert+y \end{cases}$ $-2\lvert y\rvert+y=-3$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Obliczenie zmiennej y. $y \geqslant 0$ i $-2y+y=-3$ lub $y<0$ i $2y+y=-3$ $y=3$ lub $y=-1$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują niewielkie usterki. Obliczenie zmiennej x. $\lvert x\rvert=3-\lvert 3\rvert=0$ lub $\lvert x\rvert=3-\lvert -1\rvert=2$ $x=0$ lub $x=2$ lub $x=-2$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. $x=0,\ y=3$ lub $x=2,\ y=-1$ lub $x=-2,\ y=-1$	1
2.	Dokonanie niewielkiego postępu. Wykorzystanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta. $(1+\sin x)\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)+\frac{1}{3}=0$ $(1+\sin x)\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)=-\frac{1}{3}$	1
	Dokonanie istotnego postępu. Sprowadzenie równania do równania z jedną niewiadomą. $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}=-\frac{1}{3}$ $\frac{\cos^2 x}{\cos x}=-\frac{1}{3}$ $\cos x=-\frac{1}{3}$	1
	Pokonane zasadniczych trudności zadania. Uwzględnienie założeń i obliczenie $\sin x$. $\sin^2 x=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ $\sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie $\sin x+\cos x$. $\sin x+\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
	Rozwiązanie bezbłędne. Określenie znaku liczby $\sin x + \cos x$. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3} \approx 0,6 > 0$	1
3.	Dokonanie niewielkiego postępu. Zauważenie, że $P = (x, 0)$ i zapisanie odpowiednich równości. $\overrightarrow{PD} = k \cdot \overrightarrow{PB}$ $\overrightarrow{PC} = k \cdot \overrightarrow{PA}$ $\overrightarrow{PC} = \left[4 - x, 0\right]$ i $\overrightarrow{PD} = \left[6 - x, 2\right]$ $\overrightarrow{PA} = \left[1 - x, 0\right]$ i $\overrightarrow{PB} = \left[2 - x, 1\right]$	1
	Dokonanie istotnego postępu. Zapisanie równości pozwalających na wyznaczenie k oraz x. $k \cdot \overrightarrow{PA} = \left[k(1 - x), 0\right]$ $k \cdot \overrightarrow{PB} = \left[k(2 - x), k\right]$ $k(1 - x) = 4 - x$ i $k(2 - x) = 6 - x$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Rozwiązanie układu równań. $k = 2$, $x = -2$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie długości promienia okręgu i współrzędnych punktu P. $r = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$ $P = (-2, 0)$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Zapisanie równania okręgu. $(x + 2)^2 + y^2 = 2$	1
4.	Dokonanie niewielkiego postępu. Obliczenie $\log 100$ i sprowadzenie logarytmów do tej samej podstawy. $\log_a x + \log_x a \geqslant 2$ $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$ $\log_a x + \frac{1}{\log_a x} \geqslant 2$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Dokonanie odpowiedniego podstawienia i sprowadzenie nierówności do postaci nierówności kwadratowej. $k = \log_a x$ $k + \frac{1}{k} \geqslant 2$ $k^2 + 1 \geqslant 2k$, gdyż $k > 0$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia do przekształcenia nierówności. $(k - 1)^2 \geqslant 0$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Zauważenie, że dla każdej liczby k spełniającej warunki zadania liczba $(k - 1)^2$ jest zawsze nieujemna, zatem $(\log_a x - 1)^2 \geqslant 0$. Nierówność $\log_a x + \log_x a \geqslant 2$ jest zatem prawdziwa.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
5.	Dokonanie istotnego postępu. Zapisanie długości spirali. $L = \pi r + \frac{1}{2}\pi r + ... + \frac{1}{2^9}\pi r$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Zauważenie, że wyrazy sumy tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie πr.	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Obliczenie sumy ciągu geometrycznego. $l = \pi r \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = \pi r \cdot \frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{512}\pi r$	1
6.	Dokonanie niewielkiego postępu. Określenie dzielników wyrazu wolnego: $-1, 1, -2, 2, -4, 4$. Sprawdzenie, że jednym z pierwiastków wielomianu jest liczba 1.	1
	Dokonanie istotnego postępu. Wykonanie dzielenia wielomianu przez dwumian $x-1$ i zapisanie wielomianu w postaci iloczynu. $W(x) = (x-1)(x^3+2x^2-2x-4)$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Rozłożenie wyrażenia x^3+2x^2-2x-4 na czynniki. $x^3+2x^2-2x-4 = x^2(x+2)-2(x+2) = (x+2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Określenie pierwiastków wielomianu: $1, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Obliczenie sumy odwrotności pierwiastków wielomianu. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ – liczba wymierna	1
7.	Dokonanie niewielkiego postępu. Zapisanie odpowiedniej równości, wynikającej z faktu, że punkt $A=(x,y)$ leży w tej samej odległości od prostej i punktu P. $\sqrt{(0-x)^2+\left(\frac{1}{2}-y\right)^2} = \frac{\left\lvert y+\frac{1}{2}\right\rvert}{\sqrt{0+1^2}}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Podniesienie obu stron równania do kwadratu i wykonanie redukcji wyrazów podobnych. $x^2-2y=0$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Określenie wzoru odpowiedniej krzywej. $y=\frac{1}{2}x^2$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Zapisanie wzoru funkcji. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
8.	Dokonanie niewielkiego postępu.  Wykorzystanie wzoru cosinusów. s – długość środkowej $s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c \cdot \cos\beta$ $s^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac\cos\beta$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Obliczenie $\cos\beta$. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Dokonanie odpowiedniego podstawienia i obliczenie s. $s^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 - ac \cdot \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right)$ $s^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. $s = 0{,}5\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$	1
9.	Dokonanie niewielkiego postępu. Zapisanie sumy cyfr liczby a. $a = 24681012...98100$ $S = 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 6 + ... + 9 + 8 + 1 + 0 + 0$	1
	Dokonanie istotnego postępu. Pogrupowanie składników w odpowiedni sposób. $S = (2 + 4 + 6 + 8) + \left[(0 + 2 + 4 + 6 + 8) + 5\right] + \left[\left(0 + 2 + 4 + 6 + 8\right) + 10\right] +$ $+ ... + \left[\left(0 + 2 + 4 + 6 + 8\right) + 45\right] + 1$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Obliczenie sumy cyfr z wykorzystaniem wzoru na sumę ciągu arytmetycznego. $S = \left[20 + (20 + 5) + (20 + 10) + ... + (20 + 45)\right] + 1 =$ $= 10 \cdot 20 + (5 + 10 + ... + 45) + 1 = 201 + \frac{5 + 45}{2} \cdot 9 = 426$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie sumy cyfr liczby 426 i stwierdzenie, że jest to liczba podzielna przez 3, ale niepodzielna przez 9.	1
	Rozwiązanie bezbłędne. Jeśli liczba a byłaby kwadratem pewnej liczby, musiałaby dzielić się przez $3^2 = 9$. Liczba a dzieli się przez 3, a nie dzieli się przez 9, nie jest więc kwadratem liczby naturalnej.	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
10.	Dokonanie niewielkiego postępu. Określenie warunków istnienia dwóch różnych pierwiastków dodatnich. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$	1
	Dokonanie istotnego postępu. Określenie, kiedy wyróżnik jest większy od zera $\Delta = k^2 - 9 = (k-3)(k+3)$ $\Delta > 0$ dla $k \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Określenie, kiedy suma i iloczyn pierwiastków są większe od zera – wykorzystanie wzorów Viète'a. $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -(k+1) > 0 \Leftrightarrow k < -1$ $x_1 \cdot x_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 0{,}5(k+5) > 0 \Leftrightarrow k > -5$ Stąd $k \in (-5, -1)$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Określenie iloczynu odpowiednich zbiorów. $k \in [(-\infty, -3) \cup (3, \infty)] \cap (-5, -1)$ $k \in (-5, -3)$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. $k \in (-5, -3)$	1
11.	Dokonanie niewielkiego postępu.  Uwzględnienie własności czworokąta opisanego na okręgu. $\|AD\| + \|CB\| = \|AB\| + \|CD\|$	1
	Dokonanie istotnego postępu. Określenie długości odcinka LK. $\|LK\| = \frac{\|AB\| + \|DC\|}{2} = \frac{\|AD\| + \|CB\|}{2} = 8$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności zadania. Wykorzystanie zależności między polami odpowiednich czworokątów i bokami czworokąta. $\frac{P}{P_1} = \frac{3}{5}$ $\frac{0{,}5(8 + \|DC\|) \cdot \|DE\|}{0{,}5(8 + \|AB\|) \cdot \|FE\|} = \frac{3}{5}$ $\|DE\| = \|EF\|$ – z twierdzenia Talesa $\|AB\| + \|DC\| = 16 \Rightarrow \|DC\| = 16 - \|AB\|$	1

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadań	Liczba punktów
	Rozwiązanie części zadania. Obliczenie długości jednej z podstaw. $0{,}5\,(8+\lvert DC\rvert)\cdot\lvert DE\rvert=\frac{3}{5}\cdot 0{,}5\,(8+\lvert AB\rvert)\cdot\lvert FE\rvert$ $\frac{16}{5}=\frac{3}{5}\lvert AB\rvert-\lvert DC\rvert$ $\frac{16}{5}=\frac{3}{5}\lvert AB\rvert-(16-\lvert AB\rvert)$ $\lvert AB\rvert=12$	1
	Rozwiązanie zadania do końca – w rozwiązaniu występują drobne usterki. Obliczenie długości drugiej podstawy. $\lvert CD\rvert=16-12=4$	1
	Rozwiązanie bezbłędne. $\lvert AB\rvert=12,\ \lvert CD\rvert=4$	1